G = Matrix von I, B = Matrix von II (jeweils in w).

Es gilt:

$$(4)\qquad \boxed{\begin{aligned} K &= \varkappa_1\varkappa_2 = \det\left(G^{-1}B\right) \underset{(2)}{=} \det\left(b_\alpha^\beta\right),\\ H &= \tfrac{1}{2}(\varkappa_1+\varkappa_2) = \tfrac{1}{2}\operatorname{Spur}\left(G^{-1}B\right) \underset{(2)}{=} \tfrac{1}{2}\left(b_1^1+b_2^2\right). \end{aligned}}$$

Insbesondere erkennt man, dass K und H durch die Koeffizienten b_α^β der Weingarten-Gleichung (2) bestimmt werden. Mit der Formel für G^{-1} gilt

$$G^{-1}B = \frac{1}{W}\begin{pmatrix} \mathcal{G} & -\mathcal{F} \\ -\mathcal{F} & \mathcal{E} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{W}\begin{pmatrix} \mathcal{G}\mathcal{L}-\mathcal{F}\mathcal{M} & \mathcal{G}\mathcal{M}-\mathcal{F}\mathcal{N} \\ -\mathcal{F}\mathcal{L}+\mathcal{E}\mathcal{M} & -\mathcal{F}\mathcal{M}+\mathcal{E}\mathcal{N} \end{pmatrix},\quad W := \mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2,$$

also

$$\boxed{\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\,\frac{1}{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}\left(\mathcal{L}\mathcal{G}+\mathcal{E}\mathcal{N}-2\mathcal{F}\mathcal{M}\right),\\ K &= \frac{1}{\det G}\det B = \frac{\mathcal{L}\mathcal{N}-\mathcal{M}^2}{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}. \end{aligned}}$$

Dies sind explizite Formeln für die mittlere Krümmung und die Gauß-Krümmung von X in w in Termen der Koeffizienten der Fundamentalmatrizen von I_w und II_w.

Die Gauß-Krümmung erlaubt folgende Interpretation, die von Gauß ursprünglich als Definition gewählt wurde:

Mit den Weingarten-Gleichungen (2) ist

$$N_{u_1} \times N_{u_2} = \left(\sum_{\beta=1}^{2} b_1^\beta X_{u_\beta}\right) \times \left(\sum_{\gamma=1}^{2} b_2^\gamma X_{u_\gamma}\right)$$

$$= \left(b_1^1 b_2^2 - b_1^2 b_2^1\right) X_{u_1} \times X_{u_2}$$

$$\underset{(4)}{=} K \, X_{u_1} \times X_{u_2} .$$

Sei $w_0 \in \Omega$, $\varepsilon > 0$, $\Omega_\varepsilon := \{ w \in \Omega : |w - w_0| < \varepsilon \}$.

Die Fläche $X(\Omega_\varepsilon)$ hat den Inhalt

$$A_{\Omega_\varepsilon}(X) = \int_{\Omega_\varepsilon} |X_{u_1} \wedge X_{u_2}| \, du_1 \, du_2 .$$

Nun interpretiert man die Gauß-Abbildung N als Fläche: Ist z.B. $K(w_0) \neq 0$, so auch $K \neq 0$ für $\varepsilon << 1$, so dass gemäß N_{u_1}, N_{u_2} wegen

$(*)$ $N_{u_1} \times N_{u_2} = K\, X_{u_1} \times X_{u_2} \neq 0$ linear unabhängig sind,

was die Interpretation rechtfertig. Für den Inhalt von $N(\Omega_\varepsilon)$ folgt:

$$A_{\Omega_\varepsilon}(N) = \int_{\Omega_\varepsilon} |N_{u_1} \times N_{u_2}|\, du\, dv = \int_{\Omega_\varepsilon} |K|\, |X_{u_1} \wedge X_{u_2}|\, du_1 du_2 ,$$

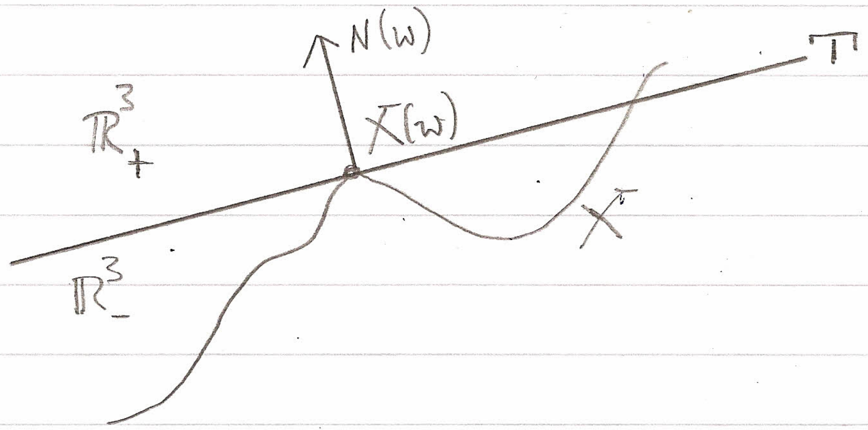
also

$$|K(w_0)| = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} A_{\Omega_\varepsilon}(N) / A_{\Omega_\varepsilon}(X) .$$

Ist $K \neq 0$ auf Ω_ε, so ist die Flächennormale $\overline{N} := (N_{u_1} \times N_{u_2}) / |N_{u_1} \times N_{u_2}|$ wohldefiniert (vgl. $(*)$), und es gilt (wieder $(*)$) $\overline{N} = N$, falls $K > 0$, $\overline{N} = -N$, falls $K < 0$. Man nennt $N : \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}^3$ das sphärische Bild von X.

Mit Hilfe der Krümmungsbegriffe wollen wir nun das lokale Verhalten von Flächen etwas näher diskutieren. Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine Fläche, $w \in \Omega$ sei fixiert. Mit T bezeichnen wir die (affine!) Tangentialebene an X in $X(w)$, also

$$T = X(w) + T_w X .$$



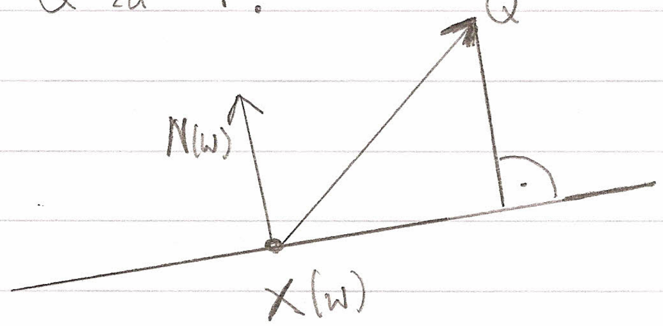
T zerlegt $\mathbb{R}^3$ in zwei Halbräume $\mathbb{R}^3_+$, $\mathbb{R}^3_-$, $\mathbb{R}^3_+$ sei derjenige Teil, in den $N(w)$ hineinzeigt, also

$$\mathbb{R}^3_+ := \{ Q \in \mathbb{R}^3 : (Q - X(w)) \cdot N(w) \geq 0 \}$$

Für $Q \in \mathbb{R}^3$ ist

$$\delta(Q) := (Q - X(w)) \cdot N(w)$$

der <u>orientierte Abstand</u> von Q zu T.



Wir wollen

$$\delta(\underbrace{X(w+h)}_{=:Q})$$

ausrechnen für $h=(h_1,h_2)$, $|h| \ll 1$. Nach Taylor ist

$$\delta(Q) = \big(X(w+h)-X(w)\big)\cdot N(w) =$$

$$\sum_{\alpha=1}^{2} X_{u_\alpha}(w)\, h_\alpha \cdot N(w) +$$

$$\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} X_{u_\alpha u_\beta}(w)\, h_\alpha h_\beta \cdot N(w) + R(h)$$

mit $|h|^{-2} R(h) \longrightarrow 0$ bei $h \to 0$. Gemäß

$$X_{u_\alpha}(w)\cdot N(w) = 0\,, \quad \alpha = 1,2,$$

folgt:

$$\delta(X(w+h)) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}^{2} X_{u_\alpha u_\beta}(w)\, h_\alpha h_\beta \cdot N(w) + R(h).$$

Sei $V_h := \sum_{\alpha=1}^{2} h_\alpha X_{u_\alpha}(w) \in T_w X$. Es ist

$$\mathrm{II}(V_h, V_h) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} h_\alpha h_\beta \, \mathrm{II}(X_{u_\alpha}(w), X_{u_\beta}(w)) =$$

$$-\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} h_\alpha h_\beta \, N_{u_\alpha}(w) \cdot X_{u_\beta}(w) =$$

$$+\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} h_\alpha h_\beta \, N(w) \cdot X_{u_\alpha u_\beta}(w),$$

zusammen:

$$(5) \qquad \delta(X(w+h)) = \frac{1}{2}\mathrm{II}(V_h, V_h) + R(h).$$

<u>Feststellung:</u> <u>Die Größe</u> $\frac{1}{2}\mathrm{II}(V_h, V_h)$ <u>misst die Höhe mit Orientierung des Punktes $X(w+h)$ über der affinen Tangentialebene T (bis auf Fehlerterme der Ordnung >2 bei $h \to 0$.)</u> Damit haben wir nochmals eine andere Interpretation von II.

<u>Definition:</u> Ein Flächenpunkt $X(w)$, $w \in \Omega$, heißt

<u>elliptisch</u> <u>parabolisch</u> <u>hyperbolisch</u>, falls

$K(w) > 0$ $K(w) = 0$ $K(w) < 0$ ist.

Sei z.B. $K(w) > 0$: Dann gilt

$$\varkappa_1(w) > 0 \quad \text{und} \quad \varkappa_2(w) > 0 \qquad (a)$$

oder

$$\varkappa_1(w) < 0 \quad \text{und} \quad \varkappa_2(w) < 0 \qquad (b)$$

nach Definition der Gauß-Krümmung. Im Fall (a) ist II positiv definit, so dass aus der Entwicklung (5) folgt, dass die Fläche lokal bei w in $\mathbb{R}^3_+$ verläuft. Gilt (b), so ist II negativ definit, also $\delta \leq 0$, d.h. X liegt lokal bei w in $\mathbb{R}^3_-$. Anders gesagt: <u>In einem elliptischen Punkt verläuft die Fläche lokal ganz auf einer Seite der affinen Tangentialebene.</u>

Die Punkte einer Sphäre sind alle elliptisch. Ist $X(u_1,u_2) = (u_1, u_2, f(u_1,u_2))$ eine Graphenfläche, so gilt

$$K = \frac{f_{u_1u_1} f_{u_2u_2} - (f_{u_1u_2})^2}{(1 + f_{u_1}^2 + f_{u_2}^2)^2} .$$

Sei speziell $f(u_1, u_2) :\doteq u_1^2 + u_2^2$. Dann ist $K > 0$, also sind auch hier alle Punkte elliptisch.

Ist $K(w) < 0$, so ist II_w indefinit, und nach (5) gilt für jede Umgebung $\mathcal{U}$ von $X(w)$

$$\mathcal{U} \cap \operatorname{Bild} X \cap \mathbb{R}^3_+ \neq \emptyset \neq \mathcal{U} \cap \operatorname{Bild} X \cap \mathbb{R}^3_- .$$

Man zeige mit obiger Formel, dass für $X(u_1,u_2) = (u_1, u_2, u_2^2 - u_1^2)$ $X(0,0)$ ein hyperbolischer Punkt von X ist.

In parabolischen Punkten $K(w) = 0$ sind beide

Fälle möglich: die Fläche kann lokal bei $X(w)$ auf einer Seite von T bleiben oder aber die affine Tangentialebene beliebig oft durchschneiden. Der erste Fall tritt ein bei $X(u_1,u_2) = (u_1, u_2, u_1^4 + u_2^4)$, der zweite Fall bei $X(u_1,u_2) = (u_1, u_2, u_1^4 - u_2^4)$ jeweils in $(0,0)$, denn $\mathcal{K}_1(0,0) = 0 = \mathcal{K}_2(0,0)$.

⟨ Übung: weitere Beispiele für die Klassifikation von Punkten ⟩

Auf Flächen gibt es gewisse ausgezeichnete Kurven, denen wir uns jetzt widmen:

Definition: Eine glatte Kurve $\gamma := X \circ \omega$ mit $\omega : \mathbb{R} \supset I \to \Omega$, $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ heißt eine geodätische Kurve auf X (kurz: Geodätische), falls

ihre geodätische Krümmung $\varkappa_g$ verschwindet.
($\Leftrightarrow$ $n(s) \parallel N(\omega(s))$, da $\varkappa_g^2 + \varkappa_n^2 = \varkappa^2$, $\varkappa_n := \varkappa n \cdot N$)
γ heißt Asymptotenlinie, falls die Normalkrümmung $\varkappa_n$ verschwindet. ($\Leftrightarrow$ $n(s) \perp N(\omega(s))$)

Bemerkungen: 1.) Geodätische Kurven sind (lokal) kürzeste Verbindungslinien auf der Fläche (s. später).

2.) Es ist

$$\varkappa_n = \mathrm{II}_\omega(\gamma',\gamma')/\mathrm{I}_\omega(\gamma',\gamma'),$$

so dass bei regulärer Parametrisierung ($\gamma' \neq 0$) gilt:

$$\varkappa_n \equiv 0 \Longleftrightarrow \mathrm{II}_\omega(\gamma',\gamma') \equiv 0 \Longleftrightarrow$$

$$(6) \quad \mathcal{L}(\omega)(\omega_1')^2 + 2\mathcal{M}(\omega)\omega_1'\omega_2' + \mathcal{N}(\omega)(\omega_2')^2 \equiv 0$$

Für (6) kann man alternativ schreiben

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix} \cdot (\omega_1', \omega_2') \equiv 0$$

Sei etwa $K = \varkappa_1(\omega) \cdot \varkappa_2(\omega) > 0$ auf Ω. Mit die Weingarten-Abbildung $S_\omega : T_\omega X \to T_\omega X$ ist

$$\mathrm{II}_\omega(\gamma', \gamma') = S_\omega(\gamma') \cdot \gamma' \quad ,$$

so dass im Falle einer Asymptotenlinie γ gilt

$$0 = S_\omega(\gamma') \cdot \gamma' = S_\omega(\lambda V_1 + \mu V_2) \cdot (\lambda V_1 + \mu V_2)$$
$$= (\varkappa_1 \lambda V_1 + \varkappa_2 \mu V_2) \cdot (\lambda V_1 + \mu V_2)$$
$$= \varkappa_1 \lambda^2 + \varkappa_2 \mu^2 ,$$

wobei V_1, V_2 jeweils eine ONB in $T_\omega X$ ist mit $S_\omega V_i = \varkappa_i V_i$, und wir $\gamma' = \lambda V_1 + \mu V_2$ geschrieben haben. $K > 0$ heißt aber $\varkappa_1 > 0$ und $\varkappa_2 > 0$ bzw. $\varkappa_1 < 0$ und $\varkappa_2 < 0$, so dass $\lambda = \mu = 0$ folgen muss im Widerspruch zu $\gamma'(t) \neq 0$. Damit ist gezeigt:

$$\boxed{\text{Ist } K > 0 \text{ auf } \Omega, \text{ so hat (6) keine Lösung, es gibt keine Asymptotenlinien auf } X.}$$